数理解析研究所講究録
286 巻 1977 年 86-102

Γ-葉層構造と半単純平坦等質空間

東北大 理 西川青季

§1. 序

本稿では，Γ-葉層構造の特性類 $H^*(B\Gamma;\mathbb{R})$ のうち，ordinary classes = 法バンドルのポントリャーギン類の消滅定理について考える。

Γ を，q 次元可微分多様体 B 上に働く擬群とし，$\mathcal{F}$ を，可微分多様体 M 上の余次元 q の Γ-葉層構造とする。即ち，$\mathcal{F}$ は次の条件 (i)(ii) を充たす，しずめ込み

$$f_\alpha : U_\alpha \to B$$

の極大な族である：

(i) $\{U_\alpha\}_\alpha$ は，M の開被覆である。

(ii) 各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して，$\gamma_{\beta\alpha}^x \in \Gamma$ が存在して，x の近傍で，$f_\beta = \gamma_{\beta\alpha}^x \circ f_\alpha$ が成立する。

この時，各しずめ込み f_α のファイバーは $\mathcal{F}$ の葉を定義し，各微分 $(f_\alpha)_*$ のファイバー全体は，M の接バンドル TM の部分バンドル $\tau(\mathcal{F})$ を定義する。商バンドル $\nu(\mathcal{F}) = TM/\tau(\mathcal{F})$ を

$\mathcal{F}$の法バンドルとよぶ。

$\nu(\mathcal{F})$の実ポントリャーギン類で生成される，$H^*(M;\mathbb{R})$の部分代数を $\mathrm{Pont}^*(\nu(\mathcal{F}))$ で表わし，その k 次元斉次部分を $\mathrm{Pont}^k(\nu(\mathcal{F}))$ で表わす。この時：

定理（Bott [1, 2, 3]）.

$$\mathrm{Pont}^k(\nu(\mathcal{F})) = 0 \quad ただし \quad k > 2q.$$

この結果は一般のΓ-葉層構造を考える限り最良である（Thurston [10]）。しかし，例えば余次元qのバンドル葉層については，容易に

(*) $\mathrm{Pont}^k(\nu(\mathcal{F})) = 0$ ただし $k > q$，

が成立していることが分かる。この情況は，見かけ程特殊なものではなく，コンパクトリー群の作用から得られる葉層構造等に対しても成立していることが分かる。

そこで，一般に

問題. どのようなΓ-葉層構造$\mathcal{F}$に対して，強消滅定理(*)が成立するか？

を，考えてみよう。

この問題に関して，次の事実が知られている：

(A) $\mathcal{F}$がリーマン葉層構造なら(*)が成立する（Pasternack [8]）。即ち，Γがリーマン多様体B上の局所等長変換の族で定義されている場合。

(B) $\mathcal{F}$が共形葉層構造なら(*)が成立する（西川-佐藤[5]）。即ち，Γがリーマン多様体B上の局所共形変換の族で定義されている場合。

(C) $\mathcal{F}$が射影葉層構造なら(*)が成立する（西川-佐藤[5]）。即ち，Γが対称な線型接続をもつ多様体B上の局所射影変換の族で定義されている場合。

本稿では，以上の結果の拡張を考える。この時，特に(B)(C)に於て，Γが半単純平坦等質空間L/L_0に同伴して得られる階数2のL_0-構造の局所自己同型のなす擬群であることに注目して，次のより一般的な強消滅定理が得られる。

<u>定理</u>（西川-竹内[6]）. $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ を半単純次数つきリー代数とし，$\mathfrak{k}_0$を$\mathfrak{g}_0$の極大コンパクト部分代数とする。L/L_0を，$\mathfrak{l}$に同伴する半単純平坦等質空間とする。Γを，L/L_0に同伴する階数2のL_0-構造の局所自己同型のなす擬群とする。この時，次の条件(1),(2)が充たされるならば，Γ-葉層構造$\mathcal{F}$に対して，強消滅定理(*)が成立する：

(1) $\mathfrak{l}$のSpencerコホモロジーに対して $H^{2,1}(\mathfrak{l}) = 0$.

(2) $\mathfrak{k}_0$のポントリャーギン代数に対して $\mathrm{Pont}(\mathfrak{k}_0) \subset I_L(\mathfrak{k}_0)$.

以下，この定理の証明を概説することを目標とする。

証明のキーポイントは，"Γ-invariant basic connection"

を構成するのに，一般の Γ に対しては，法枠バンドルの無限階の "prolongation" を考える必要があるのに対して，我々の場合には，有限階（実際には 2 階）の "prolongation" を考えるだけで事足りる点にある。

§2. 半単純平坦等質空間

先づ，定理中の用語と記号の説明から始めよう。

$\mathfrak{l}=\sum \mathfrak{g}_p$ を部分空間 $\mathfrak{g}_p$ ($p\in\mathbb{Z}$) への直和分解をもつ実リー代数とする。$\mathfrak{l}=\sum \mathfrak{g}_p$ が（推移的）次数つきリー代数とは，次の条件を充たす時をいう：

$p\leqq -2$ に対して，$\mathfrak{g}_p=0$.

任意の p, q に対して，$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q]\subset \mathfrak{g}_{p+q}$.

各 $0\neq x\in \mathfrak{g}_p$, $p\geqq 0$ に対して，$[x, \mathfrak{g}_{-1}]\neq 0$.

次数つきリー代数 $\mathfrak{l}=\sum \mathfrak{g}_p$ が半単純であるとは，$\mathfrak{l}$ が有限次元かつ実リー代数として半単純の時をいう。この時，実は $\mathfrak{g}_p=0$ ($p\geqq 2$) であり，結局 $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$ となる。更に，$\mathfrak{l}$ の Killing 形式に関して $\mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{g}_{-1}$ の双対空間であり，$e\in\mathfrak{g}_0$ が一意的に存在して，各 $\mathfrak{g}_k$ ($k=-1, 0, 1$) は

$$\mathfrak{g}_k=\{\, x\in \mathfrak{l}\ ;\ [e, x]=kx \,\}$$

で特徴付けられることが分かる。半単純次数つきリー代数は小林－長野 [4] の仕事により分類されている。

$\mathfrak{l}=\sum \mathfrak{g}_p$ を次数つきリー代数とする時，$\mathfrak{g}_{-1}$ は可換部分リー代数である。$\mathfrak{g}_{-1}$ の $\mathfrak{l}$ 上への随伴表現 $ad_{\mathfrak{l}}|\mathfrak{g}_{-1}$ に関するリー代数コホモロジー $H^*(\mathfrak{l})=H^*(\mathfrak{g}_{-1}, ad_{\mathfrak{l}}|\mathfrak{g}_{-1})$ を，$\mathfrak{l}$ の Spencer コホモロジーとよぶ。即ち，

$$C^{p,q}=\mathfrak{g}_{p-1}\otimes \Lambda^q(\mathfrak{g}_{-1})^*$$

を，$\mathfrak{g}_{p-1}$ に値をもつ $\mathfrak{g}_{-1}$ 上の q-線型交代写像のなす線型空間とし，双対境界作用素　$\partial : C^{p,q}\to C^{p-1,q+1}$ を

$$(\partial c)(x_1,\dots,x_{q+1})=\sum(-1)^{i+1}[x_i, c(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{q+1})]$$

ただし　$c\in C^{p,q}$,　$x_1,\dots,x_{q+1}\in\mathfrak{g}_{-1}$

で定義する。この時，

$$H^*(\mathfrak{l})=\sum H^{p,q}(\mathfrak{l}),$$

$$H^{p,q}(\mathfrak{l})=\partial^{-1}(0)\cap C^{p,q}/\partial C^{p+1,q-1}$$

で与えられる。

次に，半単純平坦等質空間の定義を思い出そう。L/L_0 を連結な等質空間で，その上に（必ずしも連結とは限らない）半単純リー群 L が効果的に働いているものとする。L/L_0 が 半単純平坦等質空間（semisimple flat homogeneous space）であるとは，L のリー代数 $\mathfrak{l}$ が次数つきリー代数 $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$ の構造をもち，かつ部分代数 $\mathfrak{l}_0=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$ が L_0 のリー代数になっている時をいう。L_0 の部分群 G_0 を

$$G_0=\{x\in L_0 ;\ Ad(x)\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0\}$$

で定義する。G_0 のリー代数は $\mathfrak{g}_0$ で与えられる。G_0 は，L_0 とホモトピー同値である；実際，L_0 は G_0 とベクトル群 $\exp \mathfrak{g}_1$ との半直積となることが分かる。$T_o(L/L_0)$ を，L/L_0 の原点 $o=L_0$ に於る接空間とする。これは $\mathfrak{g}_{-1}$ と線型同型である。$\mathfrak{g}_{-1}$ 従って $T_o(L/L_0)$ を自然な方法で R^q ($q=\dim \mathfrak{g}_{-1}$) と同一視しておく。この時，L の L/L_0 上への作用が効果的であることから，線型等方表現 $\lambda : L_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1}) = GL(q, R)$ により，G_0 を線型等方群と同一視することが出来る。この同一視のもとで，$\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{gl}(q, R)$ の部分代数と考えられる。

$\mathfrak{k}_0$ を $\mathfrak{g}_0$ の極大コンパクト部分代数とする。各 $X \in \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{gl}(q, R)$ に対して，ϕ_k を

$$\phi_k(X) = \mathrm{Trace}(X^{2k})$$

で定義する。$\mathrm{Pont}(\mathfrak{k}_0)$ で，$\{\phi_k ; 1 \leq k \leq [q/2]\}$ で生成される，$\mathfrak{k}_0$ の多項式代数 $S(\mathfrak{k}_0)$ の部分代数を表わし，$\mathfrak{k}_0$ のポントリャーギン代数とよぶ。更に，$I_L(\mathfrak{k}_0)$ で，$\mathfrak{l}$ 上の L-不変な多項式 P の $\mathfrak{k}_0$ 上への制限 $P|\mathfrak{k}_0$ 全体のなす，$S(\mathfrak{k}_0)$ の部分代数を表わす。

ここで，半単純次数つきリー代数 $\mathfrak{l}$ と，同伴する半単純平坦等質空間 L/L_0 の例を一つ挙げておこう。

例1.　$\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(q+1, R)$　$(q \geqq 1)$

次数つきリー代数 $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ の構造は，

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline X & \end{array}\right) \; ; \; X \in \mathbb{R}^q \right\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline & B \end{array}\right) \; ; \; \begin{array}{l} B \in \mathfrak{gl}(q, \mathbb{R}) \\ \alpha = -\mathrm{Trace}\, B \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & \xi \\ \hline & \end{array}\right) \; ; \; {}^t\xi \in \mathbb{R}^q \right\}.$$

で与えられる。同伴する L/L_0 としては，例えば：

$$L = PGL(q+1, \mathbb{R}) = GL(q+1, \mathbb{R}) / \mathbb{R}^* 1_{q+1},$$

$$L_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \in GL(q+1, \mathbb{R}) \right\} / \mathbb{R}^* 1_{q+1}.$$

L/L_0 は q 次元実射影空間 $P_q(\mathbb{R})$ である。この場合

$$G_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & b \end{array}\right) \in GL(q+1, \mathbb{R}) \right\} / \mathbb{R}^* 1_{q+1}$$

であり，線型等方表現 $\lambda : G_0 \to GL(q, \mathbb{R})$ は

$$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} \mapsto a^{-1} b$$

で与えられる。

さて，B を q 次元の可微分多様体とする。B の 1 点 o を原点として固定する。$\Gamma(B)$ を，B の局所微分同型写像全体のなす擬群とする。各正整数 $r \geq 1$ に対して，$P^r(B)$ で o のまわりで定義された $f \in \Gamma(B)$ の，o に於る r-ジェット

$j_0^r(f)$ の全体のなす空間を表わす。

$$G^r(q) = \{ j_0^r(f) \in P^r(B) \; ; \; f(0) = 0 \}$$

とおく。この時，$P^r(B)$ は B 上の，$\pi_r(j_0^r(f)) = f(0)$ を射影とする主 $G^r(q)$-バンドルである。各 $f \in \Gamma(B)$ は，$P^r(B)$ の局所バンドル同型 $f^{(r)}$ に自然に持ちあげられる。実際 $f^{(r)}$ を，

$$f^{(r)}(j_0^r(g)) = j_0^r(f \circ g), \quad j_0^r(g) \in P^r(B)$$

で定義すればよい。

半単純平坦等質空間 L/L_0 に対して，次の様にして階数 2 の L_0-構造が同伴する。先ず，中への微分同型写像 Exp を

$$\mathrm{Exp} : R^q = \mathfrak{g}_{-1} \ni x \longmapsto (\exp x) L_0 \in L/L_0$$

で定義する。これを用いて自然な写像 $\iota : L_0 \to G^2(q)$ が

$$\iota(a) = j_0^2(\mathrm{Exp}^{-1} \circ a \circ \mathrm{Exp}), \quad a \in L_0$$

で定義される。この時，基本的事実として，ι は単射準同型であることが証明される（落合 [7]）．従って，ι によって L_0 を $G^2(q)$ の部分群と考えることが出来る。B 上の主 $G^2(q)$-バンドル $P^2(B)$ の，構造群 L_0 への簡約 Q を，<u>L/L_0 に同伴する階数 2 の L_0-構造</u>という。各 L_0-構造 Q に対して，

$$\Gamma = \{ \gamma \in \Gamma(B) \; ; \; \gamma^{(2)} Q = Q \}$$

で定義される擬群を，<u>Q の局所自己同型写像のなす擬群</u>という。

例えば，先程の例 1 の場合，$L/L_0 = P_q(R)$ に同伴する階数

2の L_0-構造 $Q \to B$ が，B 上の射影構造＝対称な線型接続の射影同値類を定義し，Γ は局所射影変換のなす擬群である。

§3. 定理の証明

定理の証明は，半単純平坦等質空間の微分幾何（田中[9]，落合[7]）の諸結果を用いてなされる。詳しくは，西川-竹内[6]にある。

ℓ，L/L_0，Γ，$\mathcal{F}$ を定理に於るものとする。$\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F}$ を含む $\Gamma(B)$-葉層構造 $\hat{\mathcal{F}}$ を考えることが出来る。$\hat{\mathcal{F}}$ は，$\mathcal{F}$ の定義に於て，Γ を $\Gamma(B)$ で置き換えることにより定義され，$\mathcal{F}$ と同じ葉の構造をもつ。

$\hat{\mathcal{F}}$ を用いて，$\mathcal{F}$ の法枠バンドルの "prolongation" $P^r(\hat{\mathcal{F}})$ が定義される：

$$P^r(\hat{\mathcal{F}}) = \{ j^r_x(f_U) ; f_U \in \hat{\mathcal{F}},\ x \in U,\ f_U(x) = o \}.$$

即ち，$P^r(\hat{\mathcal{F}})$ は，M の開集合 U 上で定義され $\mathcal{F}$ の各葉上で一定，かつ $x \in U$ を B の原点 o に移すしずめ込み f_U の，点 x に於る r-ジェット $j^r_x(f_U)$ の全体のなす空間である。自然な射影 π_r を，$\pi_r(j^r_x(f_U)) = x$ で定義し，群 $G^r(q)$ を $P^r(\hat{\mathcal{F}})$ に右から

$$j^r_x(f_U) \cdot j^r_o(h) = j^r_x(h^{-1} \circ f_U), \quad j^r_x(f_U) \in P^r(\hat{\mathcal{F}}),\ j^r_o(h) \in G^r(q)$$

で作用させることにより，$P^r(\hat{\mathcal{F}})$ は M 上の主 $G^r(q)$-バンド

ルになる。実際，$P^r(\hat{\mathcal{F}})$ の $\mathcal{U}$ への制限は，B 上の主 $G^r(q)$-バンドル $P^r(B)$ の $f_{\mathcal{U}}\in\mathcal{F}$ による引き戻しと同型である：

$$f_{\mathcal{U}}^{!}(P^r(B)) \cong P^r(\hat{\mathcal{F}})|\mathcal{U} .$$

同型は，$(x, j_0^r(g)) \mapsto j_x^r(g^{-1}\circ f_{\mathcal{U}})$ で与えられる。特に，$P^1(\hat{\mathcal{F}})$ は $\mathcal{F}$ の法バンドル $\nu(\mathcal{F})$ に同伴する主 $GL(q, R)$-バンドルである。

$P^2(\hat{\mathcal{F}})$ に注目しよう。各 $\gamma\in\Gamma$ に対して，$\gamma^{(2)}$ が $P^2(B)$ の構造群 L_0 への簡約 Q を不変にすることから，族

$$\{ f_\alpha^{!}Q \ ; \ f_\alpha\in\mathcal{F} \}$$

は，自然に $P^2(\hat{\mathcal{F}})$ の構造群 L_0 への簡約 $\tilde{Q}$ を定義する。

G_0 を L/L_0 の線型等方群とする。先ず，$P^1(B)$ は構造群 G_0 への簡約 P を持つことに注意する。実際 P は，$P=\pi_2^1(Q)$ で与えられる。ここに，$\pi_2^1 : P^2(B)\to P^1(B)$ は忘れっぽい写像 $\pi_2^1(j_0^2(f)) = j_0^1(f)$ である。この時，各 $\gamma\in\Gamma$ に対して，$\gamma^{(1)}$ が P を不変にすることから，先程と同様にして，$P^1(\hat{\mathcal{F}})$ の構造群 G_0 への簡約 $\tilde{P}$ が定義される。$\tilde{P}$ は $\nu(\mathcal{F})$ に同伴する主 G_0-バンドルである。

Q^L，$\tilde{Q}^L$ をそれぞれ Q，$\tilde{Q}$ の群 L による拡大とする；

$$Q^L = Q\times_{L_0} L \quad , \quad \tilde{Q}^L = \tilde{Q}\times_{L_0} L .$$

各 $\gamma\in\Gamma$ は自然に Q^L の局所バンドル同型 $\tilde{\gamma}^{(2)}$ を誘導し，各 $f_\alpha\in\mathcal{F}$ は自然に局所バンドル写像 $\tilde{f}_\alpha^{(2)} : \tilde{Q}^L\to Q^L$ を誘導す

る。この時，次の基本的結果が知られている：

補題1（田中-落合）． Spencer コホモロジー $H^{2,1}(\ell)=0$ ならば，主 L-バンドル Q^L は次の意味で Γ-不変な接続 ω をもつ；

$$\text{各 } \gamma\in\Gamma \text{ に対して，} \quad \tilde{\gamma}^{(2)*}\omega=\omega .$$

ω の構成方法については，落合[7]を参照。ω は部分バンドル Q 上の絶対平行性を定義していることを注意しておく。ω を（L/L_0 型）標準カルタン接続とよぶ。

さて，各 $f_\alpha\in\mathcal{F}$ に対して，$f_\alpha^{(2)}:\tilde{Q}^L\to Q^L$ によって ω を $\tilde{Q}^L$ に引き戻すことにより，局所1-形式の族 $\{\tilde{f}_\alpha^{(2)*}\omega\}_\alpha$ が得られる。

補題2． $\{\tilde{f}_\alpha^{(2)*}\omega\}_\alpha$ は $\tilde{Q}^L$ の接続 $\tilde{\omega}$ を定義する。

証明． ω が Γ-不変であることから，局所1-形式 $\tilde{f}_\alpha^{(2)*}\omega$ と $\tilde{f}_\beta^{(2)*}\omega$ とは $\tilde{Q}^L|U_\alpha\cap U_\beta$ 上で一致していることが容易に分かる。

さて，定理の証明に入る：

記号は今まで通りとする。条件（1）と補題1の結果から，$Q^L\to B$ は標準カルタン接続 ω をもつ。$\tilde{\omega}$ を，補題2に於る，$\tilde{Q}^L\to M$ の ω から誘導された接続とする。この時，各 $f_\alpha\in\mathcal{F}$ に対して，$\tilde{Q}^L|U_\alpha$ の上で，

$$\tilde{\omega}=\tilde{f}_\alpha^{(2)*}\omega$$

が成立する。従って，$\Omega, \tilde{\Omega}$ をそれぞれ $\omega, \tilde{\omega}$ の曲率形式とする時，$\tilde{\Omega} = \tilde{f}_\alpha^{(2)*}\Omega$ が各 $f_\alpha \in \mathcal{F}$ に対して成立する。故に，各不変多項式 $\phi \in I_L(\mathfrak{l})$ に対して，

$$(3.1) \qquad \phi(\tilde{\Omega}) = \tilde{f}_\alpha^{(2)*}\phi(\Omega)$$

が，$\tilde{Q}^L | U_\alpha$ 上で成立する。

$\tilde{P}$ を，$\mathcal{F}$ の法バンドル $\nu(\mathcal{F})$ に同伴する主 G_0-バンドルとする。K_0 を，G_0 の極大コンパクト部分群とする時，$\tilde{P}$ は構造群 K_0 への簡約 $\tilde{P}_{K_0}$ をもつ。この簡約に対応して，Weil 準同型写像の自然性から，次の可換図式を得る：

$$(3.2) \qquad \begin{array}{ccc} I_L(\mathfrak{l}) & \xrightarrow{\ r\ } & I_{K_0}(\mathfrak{k}_0) \\ & {\scriptstyle W(\tilde{Q}^L)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle W(\tilde{P}_{K_0})} & \\ & H^*(M;\mathbb{R}) & \end{array}$$

ここに，r は制限準同型写像，$W(\tilde{Q}^L)$，$W(\tilde{P}_{K_0})$ はそれぞれ Weil 準同型写像を表わす。条件 (2) と可換図式 (3.2) から強消滅定理

$$(*) \qquad \mathrm{Pont}^k(\nu(\mathcal{F})) = 0 \qquad ただし \quad k > q = \mathrm{codim}\,\mathcal{F}$$

が得られる。

実際，任意の $\psi_k \in \mathrm{Pont}^k(\nu(\mathcal{F}))$ は，Chern-Weil 理論よりある $\Psi \in \mathrm{Pont}(\mathfrak{k}_0)$ によって

$$W(\tilde{P}_{K_0})(\Psi) = \psi_k$$

として与えられる。この時，条件 (2) により $\Psi' \in I_L(\mathfrak{l})$ が存

在して，$r(\Phi')=\Phi$ となる。図式(3.2)より $w(\tilde{Q}^L)(\Phi')=\psi_k$ である。k-形式 $\Phi'(\tilde{\Omega})$ と $\Phi'(\Omega)$ を考える。これらはそれぞれ $\tilde{Q}^L$ 又は Q^L 上の L-不変な水平形式である。従って，$\Phi'(\tilde{\Omega})$ は M 上の k-形式 $\bar{\Phi}'(\tilde{\Omega})$ を，$\Phi'(\Omega)$ は B 上の k-形式 $\bar{\Phi}'(\Omega)$ をそれぞれ誘導する。この時，(3.1)より各 U_α 上で，

(3.3) $$\bar{\Phi}'(\tilde{\Omega})=f_\alpha^*\,\bar{\Phi}'(\Omega)$$

が成立する。しかるに，$\dim B=q$ であるから，$k>q$ に対しては，$\bar{\Phi}'(\Omega)=0$ である。従って(3.3)より，$k>q$ の時 $\bar{\Phi}'(\tilde{\Omega})=0$ である。あとは，Weil 準同型写像の定義より

$$w(\tilde{Q}^L)(\Phi')=[\,\bar{\Phi}'(\tilde{\Omega})\,]\in H^*(M;\mathbb{R})$$

であることに注意すればよい。

§4. 例

ここでは，条件(1),(2)を充たす例について考える。

先ず，条件(1)については次の事が容易に分かる：

半単純次数つきリー代数 $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$ に対して，$\mathfrak{l}=\sum_k\oplus\,\mathfrak{l}^{(k)}$ を，その単純因子への分解とする。$\mathfrak{g}_p^{(k)}=\mathfrak{l}^{(k)}\cap\mathfrak{g}_p$ とおく時，$\mathfrak{l}^{(k)}=\mathfrak{g}_{-1}^{(k)}+\mathfrak{g}_0^{(k)}+\mathfrak{g}_1^{(k)}$ であり，各 $\mathfrak{l}^{(k)}$ は単純次数つきリー代数である。この時，リー代数コホモロジーの基本的性質より，各単純因子 $\mathfrak{l}^{(k)}$ が条件(1)を充たすならば，$\mathfrak{l}$ 自身条件(1)を充たすことが分かる。

さて，$\mathfrak{l}$を単純次数つきリー代数とする。この時，条件(1)を充たさないものは次の2例のみである（落合[7]）：

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), \quad e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

従って，この意味で条件(1)はそれ程強い仮定ではないと言える。

次に，条件(2)については，次の判定条件が得られる：

先ず，記号の準備をする。$\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ を半単純次数つきリー代数とし，$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ とおく。$\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{l}$ の複素化とする。$\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ の内部自己同型全体のなす群を $\mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}})$ で表わし，

$$\mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{l}) = \{\alpha \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}})\ ;\ \alpha\mathfrak{l} = \mathfrak{l}\}$$

$$\mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}_0) = \{\alpha \in \mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}})\ ;\ \alpha\mathfrak{l} = \mathfrak{l},\ \alpha\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_0\}$$

とおく。この時，

$$R = \mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{l}) / \mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{l}, \mathfrak{l}_0)$$

を，<u>$\mathfrak{l}$に同伴する対称R-空間</u>とよぶ。実際，Rは $\mathrm{Inn}(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{l}, \mathfrak{k})$-不変な（$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{l}$ の極大コンパクト部分代数）計量に関して対称リーマン空間となる。

この時，次が成立する。

<u>命題</u>. $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ を半単純次数つきリー代数とする。この時，$\mathfrak{l}$に同伴する任意の半単純平坦等質空間 L/L_0 に対して条件(2)が成立するための必要十分条件は，$\mathfrak{l}$に同伴する

対称 R-空間 R の全ポントリャーギン類 $p(R)$ が自明なことである：$p(R)=1$.

証明は，西川-竹内 [6] にある。一般に，L/L_0 がコンパクトな時，L/L_0 は R の有限被覆空間となっていることを注意しておく。

さて，条件 (1), (2) を充たす例を，古典型の $\mathfrak{l}$ の中からいくつか挙げておこう：

例 1. $\quad \mathfrak{l}=\mathfrak{sl}(q+1,\ \mathbb{R}) \quad (q \geqq 2)$

$$e=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} q & \\ \hline & -1_q \end{array}\right)$$

この時，$\mathfrak{l}$ に同伴する対称 R-空間 R は $P_q(\mathbb{R})$ に微分同型であり，従って $p(R)=1$. $\mathfrak{l}$ に同伴する半単純平坦等質空間として，$L/L_0=P_q(\mathbb{R})$ を考える時，対応して得られる Γ-葉層構造は，射影葉層構造に他ならない。

例 2. $\quad \mathfrak{l}=\mathfrak{o}(S)=\{X\in \mathfrak{gl}(q+2,\mathbb{R})\ ;\ {}^tXS+SX=0\}$

$$S=\left(\begin{array}{c|cc|c} & & & 1 \\ \hline & 1_r & & \\ & & -1_s & \\ \hline 1 & & & \end{array}\right) \qquad (r \geqq s \geqq 0,\ q=r+s \geqq 3)$$

$$e=\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & 0 & \\ \hline & & -1 \end{array}\right)$$

この時，$\mathfrak{l}$ に同伴する対称 R-空間 R は $E_{r,s}=S^r\times S^s/\sim$，$(x,y)\sim(-x,-y)$，に微分同型である。$r \geqq s=0$ の時，$\mathfrak{l}$ に同伴する半単純平坦等質空間として $L/L_0=S^r$ を考えれ

ば，対応して得られる Γ-葉層構造は，共形葉層構造に他ならない。

その他の例については，西川-竹内[6]を見られたい。

文　献

[1] I. N. Bernshtein - B. I. Rozenfel'd, Homogeneous spaces of infinite dimensional Lie algebras and characteristic classes of foliations, Russian Math. Surveys, 28 (1973), 107-142.

[2] R. Bott, On a topological obstruction to integrability, Proc. Symp. Pure Math., 16 (1970), 127-131.

[3] R. Bott - A. Haefliger, On characteristic classes of Γ-foliations, Bull. Amer. Math. Soc., 78 (1972), 1039-1044.

[4] 小林昭七 - 長野正, On filtered Lie algebras and geometric structures I, J. Math. Mech., 13 (1964), 875-908.

[5] 西川青季 - 佐藤肇, On characteristic classes of riemannian, conformal and projective foliations, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 223-241.

[6] 西川青季 - 竹内勝, Γ-foliations and semisimple flat homogeneous spaces, プレプリント.

[7] 落合卓四郎, Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 152 (1970),

159-193.

[8] J. Pasternack, Foliations and compact Lie groups actions, Comm. Math. Helv., 46 (1971), 467-477.

[9] 田中昇, On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces, J. Math. Soc. Japan, 17 (1965), 103-139.

[10] W. Thurston, Foliations and groups of diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 304-307.